**Раздел. Практическое применение теории массового обслуживания**

***Образец решения***

***Задание 1.***

Необходимо построить крытый склад, предназначенный для хранения грузов. Склад состоит из определенного числа площадок, каждая площадка обеспечивает одновременное хранение одной партии. Если на складе в момент поступления очередной партии груза нет свободных площадок, груз на хранение не принимается (заявка на хранение получает отказ). Годовой (в году 365 дней) грузооборот крытого склада *Q* тонн. Средний вес груза в одной партии g тонн, средняя нагрузка на площадь склада *d* т/м2, средний срок ее хранения (в днях). Определить полезную площадь склада (количество необходимых площадок) с вероятностью не менее 95%, обеспечивающую заданный грузооборот.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Параметры СМО | Единицы измерения | Значения |
| *Q* | Тонн | 100 000 |
| *g* | Тонн | 600 |
|  | Дней | 10 |
| *d* | т/м2 | 0,5 |

**Решение.**

Годовой грузооборот *Q* = 100 000 т.

Число партий в день:

;  = 10 (дн.),

.

Рассмотрим СМО с отказами с числом каналов *n* = 5.Возможные состояния системы:

*Х*0 – все 5 каналов не работают, свободны;

*Х*1 – 1 канал работает, занят;

*Х*3 – 2 канала заняты;

…………………………………….

*Х*5 – 5 каналов заняты.

Граф состояний имеет вид:

**…**

**…**

*λ*

*μ*

2*μ*

*X*0

*X*1

*X*2

*X*5

3*μ*

5*μ*

*λ*

λ

λ

Найдем вероятности состояний п формулам:

, где ,

,

;

;

;

;

, для *n* = 5 имеем



*P*1 = 4,566209 · 0,0150341 = 0,0686488;

*P*2 = 10,425132 · 0,0150341 = 0,1567324;

*P*3 = 15,867777 · 0,0150341 = 0,2385577;

*Р*4 = 18,113896 · 0,0150341 = 0,2723261;

*Р*5 = 16,542366 · 0,0150341 = 0,2486995.

Вероятность отказа: *Р*отк = *Р*5 = 0,2486995.

Вероятность обслуживания:

*Р*обсл. = 1 – *Р*отк = 1 – 0,2486995 = 0,7513005.

При *n* = 5 заданный грузооборот обеспечивается с вероятностью ≈75%<95% .

Пусть *n* = 6, тогда .

Найдем новое значение *Р*0:

;

*P*отк = *P*6 = 0,0126414 · 12,589316 = 0,1591465;

*P*обсл. = 1 – 0,1591465 = 0,8408535;

84%<95%.

Увеличим число каналов, пусть

*n* = 7, тогда ,

;

*P*отк.= *P*7 = 0,0114525 · 8,2122068 = 0,0940502;

*P*обсл.= 1 – 0,0940502 = 0,9059498;

91% < 95%.

При *n* = 8, имеем .

Тогда ;

*P*отк.= *P*8 = 0,010869 · 4,6873315 = 0,0509466;

*P*обсл.= 1 – 0,0509466 = 0,9490534; *P*обсл ≈ 95%.

Таким образом, следует построить склад с числом площадок *n* = 8.

Абсолютная пропускная способность склада:

0,4566209 · 0,9490534 = 0,4333576 (партий в день);

0,4333576 · 365≈158 партий грузов в год.

Среднее число занятых площадок:

;

― 4 площадки будут постоянно заняты. Среднее число свободных площадок:

≈ 4;

― 4 площадки будут постоянно свободны.

Коэффициент загрузки:

;

≈ 54 времени каждая площадка занята под хранение груза.

Коэффициент простоя:

;

≈ 46% каждая площадка простаивает.

Полезная площадь склада:

; .

**Ответ:** Склад с числом площадок равным восьми и площадью 9600 м2 обеспечит заданный грузооборот.

***Задание 2.***

Пассажирское агентство оборудовано системой продажи билетов. В часы пик интенсивность потока пассажиров, обращающихся в кассы, составляет *λ* пассажиров в минуту. Среднее время обслуживания одного человека . Входящий поток простейший. Сколько должно быть касс, чтобы средняя очередь к каждой не превышала  пассажиров?

Оценить эффективность функционирования агентства.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Параметры СМО | Единица измерения | Значения |
| *λ* | Пасс/мин | 3 |
|  | Мин | 3 |
|  | Пасс. | 3 |

**Решение.**

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченной очередью. Стационарный режим в такой системе существует если выполняется условие:

; *λ* = 3 (пасс/мин);  = 3 мин. .

Следовательно, в качестве начального значения n, возьмём n=10.

Тогда .

Возможные состояния системы:

*X*0 – все 10 каналов свободны;

*X*1 – 1 канал занят;

*X*2 – 2 канала заняты;

…………………………….

*X*10 – 10 каналов заняты;

*X*11 – 10 каналов заняты, 1 заявка в очереди;

*X*12 – 10 каналов заняты, 2 заявки в очереди.

…………………………………………………..

Граф состояний системы является бесконечным.

2*μ*



10

10

10

10

3















Вероятности состояний находим по формулам:

, .

, , …, ; *ρ* = 9; *n* = 10.

*P*1 = 9 · *P*0, ; ; ;

; ; ;

; ; .

Значение *P*0 найдём по формуле:

.

При *n* = 10 имеем ,

P0 = 1 : (1 + 9 + 40,5 + 121,5 + 273,375 + 492,075 + 738,1125 + 949,00178 +

+ 1067,627 + 1067,627 + 960,8643 + 8647,7787) =

= 1 : (5720,6825 + 8647,7787) =  ≈ 0,0000695.

Среднюю длину очереди найдём по формуле:





Увеличиваем число каналов до n=11:

; ≈3537,7276;

P0 = 1 : (5720,6825 + 786,1617 + 3537,7276) = 1 : (6506,8442 + 3537,7276) =

= 1 : 10044,571 = 0,0000995;



Следовательно, в пассажирском агентстве надо установить 11 касс и средняя длина очереди к каждой кассе ≈ 2 пас.

Вероятность обслуживания *P*обсл=1, а вероятность отказа *P*отк=0.

Абсолютная пропускная способность агентства : A=λ=9 касс/мин.

Среднее число занятых касс :  = *ρ* = 9 кассы.

Среднее число свободных касс  = 11 – 9 = 2 кассы.

Коэффициент загрузки кассы:  ≈ 82% времени каждая касса занята обслуживанием пассажиров, а 18% времени простаивает.

Среднее время ожидания:

мин.

Среднее время пребывания пассажиров в агентстве с учётом ожидания и обслуживания:

≈3,6 мин.

**Ответ:** В агентстве следует установить 11 касс.

***Вариант 1***

Необходимо построить крытый склад, предназначенный для хранения грузов. Склад состоит из определенного числа площадок, каждая площадка обеспечивает одновременное хранение одной партии. Если на складе в момент поступления очередной партии груза нет свободных площадок, груз на хранение не принимается (заявка на хранение получает отказ). Годовой (в году 365 дней) грузооборот крытого склада *Q* тонн. Средний вес груза в одной партии g тонн, средняя нагрузка на площадь склада *d* т/м2, средний срок ее хранения (в днях). Определить полезную площадь склада (количество необходимых площадок) с вероятностью не менее 95%, обеспечивающую заданный грузооборот.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Параметры СМО | Единицы измерения | Значения |
| *Q* | Тонн | 1003,5 |
| *g* | Тонн | 62 |
|  | Дней | 9,5 |
| *d* | т/м2 | 0,6 |

**Решение:**

Годовой грузооборот *Q* = 1003,5 т.

Число партий в день:

;  = 9,5 (дн.),

.

Рассмотрим СМО с отказами с числом каналов *n* = 2.

Возможные состояния системы:

*Х*0 – все 2 канала не работают, свободны;

*Х*1 – 1 канал работает, занят;

*Х*3 – 2 канала заняты;

Граф состояний системы имеет вид:

Найдем вероятности состояний по формулам:

λ

*λ*

*μ*

*X*0

*X*1

*X*2

2*μ*

, где ,

, ;

, для *n* = 2 имеем



Вероятность отказа: *Р*отк = *Р*2 = .

Вероятность обслуживания:

*Р*обсл. = 1 – *Р*отк = 1 – 0,0б078464705= 0,921535294.

При *n* =2 заданный грузооборот обеспечивается с вероятностью ≈92%<95% .

Пусть *n* =36, тогда .

Найдем новое значение *Р*0:

;

*P*отк = *P*3 = · 0б012459999 = 0,010898093;

*P*обсл. = 1 – 0,010898093= 0,989101906;

98,9%>95%.

Таким образом, следует построить склад с числом площадок *n* = 3.

λ

λ

λ

μ

2μ

3μ

*X*0

*X*1

*X*2

*X*3

Граф состояний имеет вид:

Абсолютная пропускная способность склада:

· 0,989101906= 0,043860528 (партий в день);

0,043860528 · 365≈16 партий грузов в год.

Среднее число занятых площадок:

;

―0, 4 площадки будут постоянно заняты. Среднее число свободных площадок:

≈ 2,6;

― 2,6 площадки будут постоянно свободны.

Коэффициент загрузки:

;

≈ 14% времени каждая площадка занята под хранение груза.

Коэффициент простоя:

;

≈ 86% каждая площадка простаивает.

Полезная площадь склада:

; .

**Ответ:** Склад с числом площадок равным 2 и площадью 310 м2 обеспечит заданный грузооборот.

***Вариант 2.***

Пассажирское агентство оборудовано системой продажи билетов. В часы пик интенсивность потока пассажиров, обращающихся в кассы, составляет *λ* пассажиров в минуту. Среднее время обслуживания одного человека . Входящий поток простейший. Сколько должно быть касс, чтобы средняя очередь к каждой не превышала  пассажиров?

Оценить эффективность функционирования агентства.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Параметры СМО | Единица измерения | Значения |
| *λ* | Пасс/мин | 4 |
|  | Мин | 1,8 |
|  | Пасс. | 3 |

**Решение.**

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченной очередью. Стационарный режим в такой системе существует если выполняется условие:

; *λ* = 4 (пасс/мин);  = 1,8 мин. .

Следовательно, в качестве начального значения n, возьмём n=8.

Тогда .

Возможные состояния системы:

*X*0 – все 8 каналов свободны;

*X*1 – 1 канал занят;

*X*2 – 2 канала заняты;

…………………………….

*X*8 – 8 каналов заняты;

*X*9 – 8 каналов заняты, 1 заявка в очереди;

*X*10 – 8 каналов заняты, 2 заявки в очереди.

…………………………………………………..

Граф состояний системы является бесконечным



3



8

8

8

8















Вероятности состояний находим по формулам:

, .

, , …, ;

*ρ* = 7,2; *n* = 8.

*P*1 = 7,2 · *P*0, ; ; ;

; ; ;

;.

Значение *P*0 найдём по формуле:

.

При *n* = 8 имеем ,

P0 = 1 : (1 +7,2 + 25,92 + 62,208 + 111,9744 + 161,2431 + 193,4918 +

+199,0201 + 179,1181 +1612,0628) =

= 1 : (941,1755 + 1612,0628) =  ≈ 0,0003917.

Среднюю длину очереди найдём по формуле: 



Увеличиваем число каналов до n=9:

; ≈573,1779

P0 = 1 : (941,1755 + 143,29447 + 573,1779) = 1 :1657,64787 = 0,0006033;



Следовательно, в пассажирском агентстве надо установить 9 касс и средняя длина очереди к каждой кассе ≈ 2 пас.

Вероятность обслуживания *P*обсл=1, а вероятность отказа *P*отк=0.

Абсолютная пропускная способность агентства : A=λ=4 касс/мин.

Среднее число занятых касс :  = *ρ* = 7,27 касс.

Среднее число свободных касс  = 9 – 7,2 = 1,8  2 кассы.

Коэффициент загрузки кассы:  ≈ 80% времени каждая касса занята обслуживанием пассажиров, а 20% времени простаивает.

Среднее время ожидания:

мин.

Среднее время пребывания пассажиров в агентстве с учётом ожидания и обслуживания:

≈2,2 мин.

**Ответ:** В агентстве следует установить 9 касс.